21-я Столичная физико-математическая олимпиада МФТИ

Математика

Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса – 2 часа.
Черновики не проверяются.

Общие указания по проверке

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимально число баллов за олимпиаду 28.

Общие принципы выставления оценки:
– правильное решение – 7 баллов;
– решение с недочетами – 5 – 6 баллов;
– решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи – 4 балла;
– рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения – 1 балл;
– доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи – 2-3 балла.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В работе все места с ошибками должны быть отмечены!

ЗАДАНИЯ, РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

8 класс

8.1-1. Среди *n* ладей, расставленных на доске 7×7, имеется только одна пара бьющих друг друга. Найдите наибольшее возможное значение *n*.

Ответ. 7.

Решение. Если ладей хотя бы 8, то какие-то две попадут в одну строку и будут бить друг друга. Аналогично, какие-то две попадут в один столбец и будут бить друг друга. Значит, пар бьющих друг друга ладей больше одной. Поэтому ладей не больше 7.
Поставить 7 ладей на доску так, чтобы среди них была только одна пара бьющих друг друга, можно, например, так. Ставим 7 ладей по диагонали, а потом первую ладью сдвигаем на 1 клетку по вертикали.

8.1-2. Среди *n* ладей, расставленных на доске 6×6, имеется только одна пара бьющих друг друга. Найдите наибольшее возможное значение *n*.

Ответ. 6.

Решение. Если ладей хотя бы 7, то какие-то две попадут в одну строку и будут бить друг друга. Аналогично, какие-то две попадут в один столбец и будут бить друг друга. Значит, пар бьющих друг друга ладей больше одной. Поэтому ладей не больше 6.
Поставить 6 ладей на доску так, чтобы среди них была только одна пара бьющих друг друга, можно, например, так. Ставим 6 ладей по диагонали, а потом первую ладью сдвигаем на 1 клетку по вертикали.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 0 баллов,
Сделана только оценка – 4 балла.
Построен только пример – 2 балла.

8.2-1. Когда новый ученик Вася пришел в класс, средний балл по алгебре вырос на 0,02. Какое наименьшее число учеников могло быть в классе до прихода Васи?

Ответ. 24.

Решение. Пусть в классе было x учеников, их суммарный балл по алгебре равнялся S, а Васина оценка по алгебре A. Тогда $\frac{S+A}{x+1}-\frac{S}{x}=\frac{1}{50}$. Отсюда $\frac{Ax-S}{x(x+1)}=\frac{1}{50}$, то есть $x(x+1)=50(Ax-S)$. Значит, $x(x+1)$ делится на $25=5^2$. Числа x и $x+1$ взаимно простые, поэтому либо x, либо $x+1$ делится на 25. Значит, $x+1\ge 25$, то есть $x\ge 24$.
Покажем, что в классе могло быть 24 ученика. Пусть $S=108, A=5, x=24$, тогда $\frac{S+A}{x+1}-\frac{S}{x}=\frac{113}{25}-\frac{108}{24}=\frac{1}{50}$.

8.2-2. Когда новый ученик Вася пришел в класс, средний балл по алгебре вырос на 0,04. Какое наименьшее число учеников могло быть в классе до прихода Васи?

Ответ. 24.

Решение. Пусть в классе было x учеников, их суммарный балл по алгебре равнялся S, а Васина оценка по алгебре A. Тогда $\frac{S+A}{x+1}-\frac{S}{x}=\frac{1}{25}$. Отсюда $\frac{Ax-S}{x(x+1)}=\frac{1}{25}$, то есть $x(x+1)=25(Ax-S)$. Значит, $x(x+1)$ делится на $25=5^2$. Числа x и $x+1$ взаимно простые, поэтому либо x, либо $x+1$ делится на 25. Значит, $x+1\geq 25$, то есть $x\geq 24$.
Покажем, что в классе могло быть 24 ученика. Пусть $S=96, A=5, x=24$, тогда $\frac{S+A}{x+1}-\frac{S}{x}=\frac{101}{25}-\frac{96}{24}=\frac{1}{25}$.

Комментарий. Доказано, что учеников было не меньше 24 – 4 балла.
Приведен пример с 24 учениками – 3 балла.

8.3-1. Известно, что $a+b+c=3$. Докажите, что по крайней мере одно из чисел a^2-2b+c, b^2-2c+a, c^2-2a+b неотрицательно.
Решение.
Рассмотрим сумму трех чисел. Она равна
$a^2-2b+c+b^2-2c+a+c^2-2a+b=a^2-2b+b^2-2c+c^2-2a+3=$
$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq 0$. Поэтому по крайней мере одно из чисел неотрицательно.

8.3-2. Известно, что $a+b+c=6$. Докажите, что по крайней мере одно из чисел $a^2-4b+2c$, $b^2-4c+2a$, $c^2-4a+2b$ неотрицательно.
Решение.
Рассмотрим сумму трех чисел. Она равна
$a^2-4b+2c+b^2-4c+2a+c^2-4a+2b=a^2-4b+b^2-4c+c^2-4a+12=$
$(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2\geq 0$. Поэтому по крайней мере одно из чисел неотрицательно.

Комментарий. Записано строгое неравенство вместо нестрогого – 6 баллов.

8.4-1. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Известно, что окружность, описанная около треугольника ABH, пересекает сторону BC в ее середине – точке M. Известно, что $\angle BAC=50°$. Найдите угол BHM.

Ответ. $\angle BHM=25°$.

Решение: Треугольник BHA – прямоугольный, поэтому центр O описанной около него окружности является серединой стороны AB, и при этом $OA=OB=OH=OM$. Заметим, что точка M – центр окружности, описанной около треугольника BHC, и потому $MH=MB$. Тогда угол BHM равен углу MBH, и равен $90°-\angle BCA$. Теперь осталось заметить, что $BA=2OB=2OM=AC$, так как OM – средняя линия треугольника ABC, и потому угол $\angle BHM=90°-\angle BCA=\frac{1}{2}\angle BAC=25°$.

8.4-2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Известно, что окружность, описанная около треугольника ABH, пересекает сторону BC в ее середине – точке M. Известно, что $\angle BAC=70°$. Найдите угол BHM.

Ответ. $\angle BHM=35°$.

Решение: Треугольник BHA – прямоугольный, поэтому центр O описанной около него окружности является серединой стороны AB, и при этом $OA = OB = OH = OM$. Заметим, что точка M – центр окружности, описанной около треугольника BHC, и потому $MH = MB$. Тогда угол BHM равен углу MBH, и равен $90° - \angle BCA$. Теперь осталось заметить, что $BA = 2OB = 2OM = AC$, так как OM – средняя линия треугольника ABC, и потому угол $\angle BHM = 90° - \angle BCA = \frac{1}{2}\angle BAC = 35°$.

Комментарий. Доказано, что треугольник ABC – равнобедренный – 3 балла.

9 класс

9.1-1. Дан правильный 60-угольник. В нем провели все диагонали, соединяющие вершины, между которыми не более 19 других вершин. Сколько равнобедренных треугольников нарисовано? (Сторонами равнобедренного треугольника могут быть стороны и проведенные диагонали данного правильного многоугольника.)

Ответ. 620.

Решение. Посчитаем основания равнобедренных треугольников, которые не содержат центр многоугольника. Треугольник будет равнобедренным, если между точками основания будет нечетное число отмеченных точек, то есть 19, 17, 15, …, 1. Отрезков каждого вида ровно 60. Поэтому таких треугольников $60 \cdot 10 = 600$. Также возможен случай, когда треугольник содержит центр многоугольника. Это возможно только если между вершинами лежит ровно по 19 точек, и такие треугольники будут равносторонними. Их количество равно 20. Итого получаем 620 треугольников.

9.1-2. Дан правильный 90-угольник. В нем провели все диагонали, соединяющие вершины, между которыми не более 29 других вершин. Сколько равнобедренных треугольников нарисовано? (Сторонами равнобедренного треугольника могут быть стороны и проведенные диагонали данного правильного многоугольника.)

Ответ. 1380.

Решение. Посчитаем основания равнобедренных треугольников, которые не содержат центр многоугольника. Треугольник будет равнобедренным, если между точками основания будет нечетное число отмеченных точек, то есть 29, 27, 25, …, 1. Отрезков каждого вида ровно 90. Поэтому таких треугольников $90 \cdot 15 = 1350$. Также возможен случай, когда треугольник содержит центр многоугольника. Это возможно только если между вершинами лежит ровно по 29 точек, и такие треугольники будут равносторонними. Их количество равно 30. Итого получаем 1380 треугольников.

Комментарий. Не учтены равносторонние треугольники – снять 3 балла.

9.2-1. Когда новый ученик Вася пришел в класс, средний балл по алгебре вырос на 0,04. Какое наибольшее число учеников могло быть в классе до прихода Васи, если в классе было меньше 30 учеников?

Ответ. 25.

Решение. Пусть в классе было x учеников, их суммарный балл по алгебре равнялся S, а Васина оценка по алгебре A. Тогда $\frac{S+A}{x+1} - \frac{S}{x} = \frac{1}{25}$. Отсюда $\frac{Ax-S}{x(x+1)} = \frac{1}{25}$, то есть $x(x+1) = 25(Ax - S)$. Значит, $x(x+1)$ делится на $25 = 5^2$. Числа x и $x+1$ взаимно простые, поэтому либо x, либо $x+1$ делится на 25. Значит, в классе было либо 24, либо 25 учеников.

Покажем, что в классе могло быть 25 учеников. Пусть $S=99, A=5, x=25$, тогда $\frac{S+A}{x+1}-\frac{S}{x}=\frac{104}{26}-\frac{99}{25}=\frac{1}{25}$.

9.2-2. Когда новый ученик Вася пришел в класс, средний балл по алгебре вырос на 0,02. Какое наибольшее число учеников могло быть в классе до прихода Васи, если в классе было меньше 30 учеников?

Ответ. 25.

Решение. Пусть в классе было x учеников, их суммарный балл по алгебре равнялся S, а Васина оценка по алгебре A. Тогда $\frac{S+A}{x+1}-\frac{S}{x}=\frac{1}{50}$. Отсюда $\frac{Ax-S}{x(x+1)}=\frac{1}{50}$, то есть $x(x+1)=50(Ax-S)$. Значит, $x(x+1)$ делится на $25=5^2$. Числа x и $x+1$ взаимно простые, поэтому либо x, либо $x+1$ делится на 25. Значит, в классе было либо 24, либо 25 учеников.
Покажем, что в классе могло быть 25 учеников. Пусть $S=112, A=5, x=25$, тогда $\frac{S+A}{x+1}-\frac{S}{x}=\frac{117}{26}-\frac{112}{25}=\frac{1}{50}$.

Комментарий. Доказано, что учеников было не больше 25 – 4 балла.
Приведен пример с 25 учениками – 3 балла.

9.3-1. Известно, что $a+b+c=3$. Докажите, что по крайней мере одно из чисел $a^2-3b+2c$, $b^2-3c+2a$, $c^2-3a+2b$ неотрицательно.
Решение.
Рассмотрим сумму трех чисел. Она равна
$a^2-b+b^2-c+c^2-a-(a+b+c)+(a+b+c)=a^2-2a+b^2-2b+c^2-2c+3=$
$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geq 0$. Поэтому по крайней мере одно из чисел неотрицательно.

9.3-2. Известно, что $a+b+c=6$. Докажите, что по крайней мере одно из чисел $a^2-5b+3c$, $b^2-5c+3a$, $c^2-5a+3b$ неотрицательно.
Решение.
Рассмотрим сумму трех чисел. Она равна
$a^2-2b+b^2-2c+c^2-2a-2(a+b+c)+2(a+b+c)=a^2-4a+b^2-4b+c^2-4c+12=$
$(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2\geq 0$. Поэтому по крайней мере одно из чисел неотрицательно.

Комментарий. Записано строгое неравенство вместо нестрогого – 6 баллов.

9.4-1. Пусть I и O – соответственно центры окружности, вписанной в неравнобедренный остроугольный треугольник ABC, и описанной около него. Прямые AI и CI пересекают описанную около треугольника окружность в точках D и E соответственно. Известно, что точки E, I, O, D лежат на одной окружности. Найдите угол $\angle ABC$.
Ответ. $\angle ABC=60^\circ$.

Решение. Заметим, что точки D и E – середины дуг BC и AB, поэтому отрезки OD и OE перпендикулярны сторонам BC и AB соответственно. Тогда $\angle DOE=180^\circ-\gamma$, где

$\gamma = \angle ABC$. Но мы знаем, что $\angle EID = 90° + \frac{1}{2}\gamma$, как угол между биссектрисами треугольника. Кроме того, из условия расположения точек на одной окружности следует, что $\angle DOE = \angle DIE$. Отсюда $180° - \gamma = 90° + \frac{1}{2}\gamma$, т.е. $\gamma = 60°$. То есть $\angle ABC = 60°$.

9.4-2. Пусть I и O – соответственно центры окружности, вписанной в неравнобедренный остроугольный треугольник ABC, и описанной около него. Прямые AI и CI пересекают описанную около треугольника окружность в точках D и E соответственно. Известно, что точки E, I, O, D лежат на одной окружности. Найдите угол $\angle DOE$.
Ответ. $\angle DOE = 120°$.
Решение. Заметим, что точки D и E – середины дуг BC и AB, поэтому отрезки OD и OE перпендикулярны сторонам BC и AB соответственно. Тогда $\angle DOE = 180° - \gamma$, где $\gamma = \angle ABC$. Но мы знаем, что $\angle EID = 90° + \frac{1}{2}\gamma$, как угол между биссектрисами треугольника. Кроме того, из условия расположения точек на одной окружности следует, что $\angle DOE = \angle DIE$. Отсюда $180° - \gamma = 90° + \frac{1}{2}\gamma$, т.е. $\gamma = 60°$. То есть $\angle DOE = 120°$.

Комментарий. Записана связь между углами *EID* и *ABC* – 2 балла.

10 класс

10.1-1. На полуокружности равномерно отметили 200 точек (расстояние между любыми двумя соседними точками равны). Любые две точки, между которыми не более 19 точек, соединили отрезком. Сколько равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках нарисовано?
Ответ. 1890.
Решение. Посчитаем основания этих равнобедренных треугольников. Треугольник будет равнобедренным, если между точками основания будет нечетное число отмеченных точек. Если между точками основания лежит 19 точек, то таких оснований будет $200 - 19 - 1 = 180$. Если 17 – то 182, если 15 – то 184, …, если 1 – то 198. Таким образом, искомое количество равно $\frac{180 + 198}{2} \cdot 10 = 1890$.

10.1-2. На полуокружности равномерно отметили 210 точек (расстояние между любыми двумя соседними точками равны). Любые две точки, между которыми не более 17 точек, соединили отрезком. Сколько равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках нарисовано?
Ответ. 1800.
Решение. Посчитаем основания этих равнобедренных треугольников. Треугольник будет равнобедренным, если между точками основания будет нечетное число отмеченных точек. Если между точками основания лежит 17 точек, то таких оснований будет $210 - 17 - 1 = 192$. Если 15 – то 194, если 13 – то 196, …, если 1 – то 208. Таким образом, искомое количество равно $\frac{192 + 208}{2} \cdot 9 = 1800$.

Комментарий. Неверный ответ из-за того, что количество треугольников одного типа отличается от правильного на 1 – снять 2 балла.

10.2-1. Задано 4 натуральных числа a, b, c, d. На доску в некотором порядке написали 6 чисел – попарные суммы чисел a, b, c, d. Оказалось, что первое число на доске делится на 2, второе – на 3, третье – на 4, четвертое – на 8, пятое – на 9 и шестое на 10. Может ли сумма $a+b+c+d$ оказаться простым числом?

Ответ. Не может.

Решение. Докажем, что среди чисел a, b, c, d четное количество нечетных чисел. Действительно, если бы среди чисел a, b, c, d было бы ровно одно четное или ровно одно нечетное, то из 6 написанных на доске попарных сумм ровно 3 были бы четными. Однако для того, чтобы попарные суммы делились на 2, 4, 8 и 10, нужно, чтобы они были четными, то есть четных попарных сумм должно быть не менее 4, а их всего 3. Значит, среди чисел a, b, c, d четное количество нечетных чисел. Поэтому их сумма $a+b+c+d$ является четным числом, большим 2, то есть не является простым.

10.2-2. Задано 4 натуральных числа a, b, c, d. На доску в некотором порядке написали 6 чисел – попарные суммы чисел a, b, c, d. Оказалось, что первое число на доске делится на 2, второе – на 3, третье – на 4, четвертое – на 10, пятое – на 11 и шестое на 12. Может ли сумма $a+b+c+d$ оказаться простым числом?

Ответ. Не может.

Решение. Докажем, что среди чисел a, b, c, d четное количество нечетных чисел. Действительно, если бы среди чисел a, b, c, d было бы ровно одно четное или ровно одно нечетное, то из 6 написанных на доске попарных сумм ровно 3 были бы четными. Однако для того, чтобы попарные суммы делились на 2, 4, 10 и 12, нужно, чтобы они были четными, то есть четных попарных сумм должно быть не менее 4, а их всего 3. Значит, среди чисел a, b, c, d четное количество нечетных чисел. Поэтому их сумма $a+b+c+d$ является четным числом, большим 2, то есть не является простым.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 0 баллов.

10.3-1. Дана парабола $y=6x^2$. На параболе выбраны четыре точки A, B, C, D так, что углы AOB и COD – прямые (O – начало координат). Отрезки AB и CD пересекаются в точке P. Найдите наибольшую возможную длину отрезка OP.

Ответ. $\frac{1}{6}$.

Решение. Докажем, что для параболы $y=ax^2$ все такие отрезки пересекаются на оси Oy в точке $\left(0;\frac{1}{a}\right)$. Рассмотрим точки A и B. Пусть их координаты $A\left(x_A, ax_A^2\right), B\left(x_B, ax_B^2\right)$. Так как угол AOB – прямой, то $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_Ax_B+a^2x_A^2x_B^2=0$, откуда $x_Ax_B=-\frac{1}{a^2}$. Пусть прямая AB с уравнением $y=kx+b$ пересекает параболу $y=ax^2$. Тогда абсциссы точек пересечения x_A, x_B находятся из уравнения $ax^2-kx-b=0$. По теореме Виета $x_Ax_B=-\frac{b}{a}$. Значит, $-\frac{b}{a}=-\frac{1}{a^2}$. Откуда $b=\frac{1}{a}$, то есть прямая AB пересекает Oy в точке $\left(0;\frac{1}{a}\right)$. Поэтому длина отрезка OP равна $\frac{1}{a}=\frac{1}{6}$.

10.3-2. Дана парабола $y=11x^2$. На параболе выбраны четыре точки A, B, C, D так, что углы AOB и COD – прямые (O – начало координат). Отрезки AB и CD пересекаются в точке P. Найдите наибольшую возможную длину отрезка OP.

Ответ. $\frac{1}{11}$.

Решение. Докажем, что для параболы $y=ax^2$ все такие отрезки пересекаются на оси Oy в точке $\left(0;\frac{1}{a}\right)$. Рассмотрим точки A и B. Пусть их координаты $A\left(x_A, ax_A^2\right), B\left(x_B, ax_B^2\right)$. Так как угол AOB – прямой, то $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_Ax_B+a^2x_A^2x_B^2=0$, откуда $x_Ax_B=-\frac{1}{a^2}$. Пусть прямая AB с уравнением $y=kx+b$ пересекает параболу $y=ax^2$. Тогда абсциссы точек пересечения x_A, x_B находятся из уравнения $ax^2-kx-b=0$. По теореме Виета $x_Ax_B=-\frac{b}{a}$. Значит, $-\frac{b}{a}=-\frac{1}{a^2}$. Откуда $b=\frac{1}{a}$, то есть прямая AB пересекает Oy в точке $\left(0;\frac{1}{a}\right)$. Поэтому длина отрезка OP равна $\frac{1}{a}=\frac{1}{11}$.

Комментарий. Условие перпендикулярности прямых OA и OB записано через связь между координатами точек – 3 балла.

10.4-1. На основании AC треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD в два раза больше длины AC. Найдите угол между прямыми AC и DB.

Ответ: $\arcsin\frac{1}{4}$.

Решение. Пусть $\angle BAC=\alpha, \angle BCA=\gamma$, O_1 и O_2 – центры окружностей, описанных вокруг треугольников ABD и BDC соответственно. Треугольники O_1BO_2 и O_1DO_2 равны по трем равным сторонам, из этого следует, что O_1O_2 – биссектриса угла BO_1D. Тогда $\angle BO_1O_2=\frac{1}{2}\angle BO_1D$. В свою очередь угол BO_1D в два раза больше угла BAC, как центральный и вписанный, отсюда следует, что $\angle BO_1O_2=\angle BAC=\alpha$. Аналогично получаем, что $\angle BO_2O_1=\gamma$. Итого получается, что треугольники ABC и O_1BO_2 подобны по двум равным углам α и γ.

Введем обозначение $O_1B=R$. Тогда из подобия треугольников ABC и O_1BO_2 следует, что $\frac{AB}{R}=\frac{AC}{O_1O_2}$. Следовательно, $AB=\frac{R}{2}$. Из теоремы синусов для треугольника ABD следует, что $\sin\angle ADB=\frac{AB}{2R}=\frac{1}{4}$. Итого получаем, что искомый угол равен $\arcsin\frac{1}{4}$.

10.4-2. На основании AC треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD в три раза больше длины AC. Найдите угол между прямыми AC и DB.

Ответ: $\arcsin\frac{1}{6}$.

Решение. Пусть $\angle BAC=\alpha, \angle BCA=\gamma$, O_1 и O_2 – центры окружностей, описанных вокруг треугольников ABD и BDC соответственно. Треугольники O_1BO_2 и O_1DO_2 равны по трем равным сторонам, из этого следует, что O_1O_2 – биссектриса угла BO_1D. Тогда $\angle BO_1O_2=\frac{1}{2}\angle BO_1D$. В свою очередь угол BO_1D в два раза больше угла BAC, как центральный и вписанный, отсюда следует, что $\angle BO_1O_2=\angle BAC=\alpha$. Аналогично получаем, что $\angle BO_2O_1=\gamma$. Итого получается, что треугольники ABC и O_1BO_2 подобны по двум равным углам α и γ.

Введем обозначение $O_1B=R$. Тогда из подобия треугольников ABC и O_1BO_2 следует, что $\frac{AB}{R}=\frac{AC}{O_1O_2}$. Следовательно, $AB=\frac{R}{3}$. Из теоремы синусов для треугольника ABD следует, что $\sin\angle ADB=\frac{AB}{2R}=\frac{1}{6}$. Итого получаем, что искомый угол равен $\arcsin\frac{1}{6}$.

Комментарий. Доказано, что O_1O_2 – биссектриса угла BO_1D – 2 балла.
Доказано подобие треугольников ABC и O_1BO_2 – 3 балла.

11 класс

11.1-1. Назовем число *интересным*, если любые две его соседние цифры отличаются на 2. Сколько 14-значных интересных чисел делится на 11?

Ответ. 0.

Решение. Воспользуемся критерием делимости на 11: «число делится на 11, если знакочередующаяся сумма S его цифр делится на 11». Разобьем цифры числа на 7 пар. Тогда $S=\pm 2\pm 2\ldots\pm 2$ (7 двоек). Но данная сумма четна и по модулю меньше 22. Поэтому интересное число может делиться на 11, только если $S=0$. Но это также невозможно, поскольку в S входит нечетное число двоек (и либо больше будет со знаком плюс, либо со знаком минус). Поэтому ни одно интересное число не может делится на 11.

11.1-2. Назовем число *интересным*, если любые две его соседние цифры отличаются на 2. Сколько 18-значных интересных чисел делится на 11?

Ответ. 0.

Решение. Воспользуемся критерием делимости на 11: «число делится на 11, если знакочередующаяся сумма S его цифр делится на 11». Разобьем цифры числа на 9 пар. Тогда $S=\pm 2\pm 2\ldots\pm 2$ (9 двоек). Но данная сумма четна и по модулю меньше 22. Поэтому интересное число может делиться на 11, только если $S=0$. Но это также невозможно, поскольку в S входит нечетное число двоек (и либо больше будет со знаком плюс, либо со знаком минус). Поэтому ни одно интересное число не может делится на 11.

Комментарий. Используется неверный критерий делимости на 11 (суммы цифр на четных и нечетных местах равны) – не более 3 баллов за задачу.

11.2-1. Пусть S_n – сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем 2. Известно, что $\dfrac{(S_{3n}-S_{2n})^2}{S_n(S_{4n}-S_{3n})}=2048$. Найдите n.

Ответ. 11.

Решение. Пусть b – первый член данной прогрессии. Тогда $S_{m+k}=S_m+b\cdot 2^m+b\cdot 2^{m+1}+\ldots+b\cdot 2^{m+k-1}$, откуда $S_{m+k}-S_m=2^m(b+b\cdot 2+\ldots+b\cdot 2^{k-1})=2^m S_k$.

Из последней формулы следует, что $S_{3n}-S_{2n}=S_{2n+n}-S_{2n}=2^{2n}S_n$ и $S_{4n}-S_{3n}=S_{3n+n}-S_{3n}=2^{3n}S_n$.

Тогда изначальное уравнение будет равносильно следующему:

$$\frac{(2^{2n}S_n)^2}{S_n\cdot 2^{3n}S_n}=2048\Leftrightarrow 2^n=2^{11}\Leftrightarrow n=11.$$

11.2-2. Пусть S_n – сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем 2. Известно, что $\dfrac{(S_{4n}-S_{3n})^2}{S_n(S_{6n}-S_{5n})}=4096$. Найдите n.

Ответ. 12.

Решение.

Пусть b – первый член данной прогрессии. Тогда $S_{m+k}=S_m+b\cdot 2^m+b\cdot 2^{m+1}+\ldots+b\cdot 2^{m+k-1}$, откуда $S_{m+k}-S_m=2^m(b+b\cdot 2+\ldots+b\cdot 2^{k-1})=2^m S_k$.

Из последней формулы следует, что $S_{4n}-S_{3n}=S_{3n+n}-S_{3n}=2^{3n}S_n$ и $S_{6n}-S_{5n}=S_{5n+n}-S_{5n}=2^{5n}S_n$.

Тогда изначальное уравнение будет равносильно следующему:

$$\frac{(2^{3n}S_n)^2}{S_n\cdot 2^{5n}S_n}=2048\Leftrightarrow 2^n=2^{12}\Leftrightarrow n=12.$$

Комментарий. Баллы не ставятся, если написана формула суммы геометрической прогрессии (без дальнейших продвижений).

11.3-1. Докажите, что уравнение $x^{999}+2x^{998}+3x^{997}+\ldots+999x+1000=0$ не имеет решений в целых числах

Решение. Во-первых, заметим, что любое решение этого уравнения – отрицательное число, поэтому целочисленный корень x_0 уравнения либо равен –1, либо $x_0\le -2$. Но значение многочлена при $x_0=-1$ – положительно, так как оно равно $-1+2-3+4-\ldots-999+1000=500$. А при $x_0\le -2$ оно отрицательно, так как значение суммы каждой пары слагаемых $kx_0^{2n-k}+(k+1)x_0^{2n-k-1}=x_0^{2n-k-1}(kx_0+(k+1))$ (где k – нечетно), в сумму которых разбивается многочлен, – отрицательно (одна сумма может принимать нулевое значение).

11.3-2. Докажите, что уравнение $x^{499}+2x^{498}+3x^{497}+\ldots+499x+500=0$ не имеет решений в целых числах

Решение. Во-первых, заметим, что любое решение этого уравнения – отрицательное число, поэтому целочисленный корень x_0 уравнения либо равен –1, либо $x_0\le -2$. Но значение многочлена при $x_0=-1$ – положительно, так как оно равно $-1+2-3+4-...-499+500=250$. А при $x_0\le -2$ оно отрицательно, так как значение суммы каждой пары слагаемых $kx_0^{2n-k}+(k+1)x_0^{2n-k-1}=x_0^{2n-k-1}(kx_0+(k+1))$ (где k – нечетно), в сумму которых разбивается многочлен, – отрицательно (одна сумма может принимать нулевое значение).

Комментарий. Написано с обоснованием, что любой корень уравнения – отрицательный – 2 балла.

11.4-1. Для выпуклого четырехугольника *ABCD* выполняется свойство: проекции противоположных сторон на одну диагональ имеют равные длины, и проекции противоположных сторон на вторую диагональ имеют равные длины (проекции лежат на диагоналях). Какое наибольшее значение может принимать $\angle ABC$, если $\angle BCD=55°$?
Ответ. $\angle ABC=125°$.
Решение. Пусть *O* – точка пересечения диагоналей четырехугольника *ABCD*. Пусть $\angle BAO=\alpha, \angle DCO=\beta, \angle AOD=\gamma$. По теореме о внешнем угле треугольника тогда получаем: $\angle ABO=\gamma-\alpha, \angle CDO=\gamma-\beta$. И, значит, указанные в условии проекции есть $AB\cdot\cos\alpha=CD\cdot\cos\beta$ и $AB\cdot\cos(\gamma-\alpha)=CD\cdot\cos(\gamma-\beta)$. Из этих равенств следует, что $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos(\gamma-\beta)}$. Пусть $\alpha>\beta$. Тогда $\gamma-\alpha<\gamma-\beta$, и из монотонности косинуса получаем: $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}<1$, $\frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos(\gamma-\beta)}>1$. Последние неравенства противоречат равенству $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos(\gamma-\beta)}$. Аналогично невозможно и неравенство $\alpha<\beta$. Значит, $\alpha=\beta$. Тогда стороны *AB* и *CD* параллельны. Кроме того, они равны, так как равны их проекции. Значит, четырехугольник *ABCD* – параллелограмм. Поэтому $\angle ABC=180°-\angle BCD=125°$.

11.4-2. Для выпуклого четырехугольника *ABCD* выполняется свойство: проекции противоположных сторон на одну диагональ имеют равные длины, и проекции противоположных сторон на вторую диагональ имеют равные длины (проекции лежат на диагоналях). Какое наименьшее значение может принимать $\angle BCD$, если $\angle ADC=100°$?
Ответ. $\angle BCD=80°$.
Решение. Пусть *O* – точка пересечения диагоналей четырехугольника *ABCD*. Пусть $\angle BAO=\alpha, \angle DCO=\beta, \angle AOD=\gamma$. По теореме о внешнем угле треугольника тогда получаем: $\angle ABO=\gamma-\alpha, \angle CDO=\gamma-\beta$. И, значит, указанные в условии проекции есть $AB\cdot\cos\alpha=CD\cdot\cos\beta$ и $AB\cdot\cos(\gamma-\alpha)=CD\cdot\cos(\gamma-\beta)$. Из этих равенств следует, что $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos(\gamma-\beta)}$. Пусть $\alpha>\beta$. Тогда $\gamma-\alpha<\gamma-\beta$, и из монотонности косинуса получаем: $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}<1$, $\frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos(\gamma-\beta)}>1$. Последние неравенства противоречат равенству $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos(\gamma-\beta)}$. Аналогично невозможно и неравенство $\alpha<\beta$. Значит, $\alpha=\beta$. Тогда стороны *AB* и *CD* параллельны. Кроме того, они равны, так как равны их проекции. Значит, четырехугольник *ABCD* – параллелограмм. Поэтому $\angle BCD=180°-\angle ADC=80°$.

Комментарий. Доказано, что четырехугольник *ABCD* – параллелограмм – 6 баллов.