



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МЕЖВУЗОВСКИЙ ЦЕНТР ВОСПИТАНИЯ И  
РАЗВИТИЯ ТАЛАНТЛИВОЙ МОЛОДЕЖИ В  
ОБЛАСТИ  
ЕСТЕСТВЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК  
«ФИЗТЕХ-ЦЕНТР»

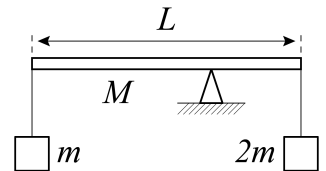
---

58-Я ВЫЕЗДНАЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА  
МФТИ  
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

**Ф8.1** Из пунктов  $A$  и  $B$ , расположенных на расстоянии  $L = 50$  км друг от друга вдоль прямолинейного участка шоссе, одновременно в одном направлении начали двигаться два мотоциклиста. Из пункта  $A$  мотоциклист едет по направлению к пункту  $B$  со скоростью  $V_1 = 90$  км/ч, а мотоциклист из пункта  $B$  — со скоростью  $V_2 = 60$  км/ч. На каком расстоянии от пункта  $B$  мотоциклисты встретятся?

**Ф8.2** Вася прошел  $2/3$  пути со скоростью  $V_1 = 5$  км/ч, а оставшуюся часть пути пробежал с постоянной скоростью. С какой скоростью бежал Вася, если его средняя скорость на всем пути составила  $V_{\text{ср}} = 6$  км/ч?

**Ф8.3** Однородная доска массой  $M$  и длиной  $L$  положена на опору и находится в равновесии (см. рис.). На левом конце доски подвешен груз массой  $m$ , а на правом — груз массой  $2m$ . Найти расстояние между опорой и правым концом доски.



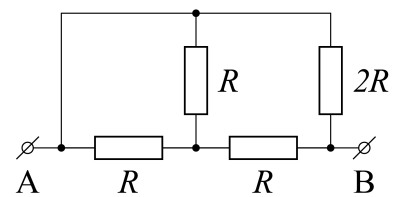
**Ф8.4** Шарик взвешивают с помощью динамометра. Первый раз шарик взвесили в воздухе, а второй раз в жидкости с плотностью  $\rho_{\text{ж}} = 0,8$  г/см<sup>3</sup>. Вес шарика в воздухе оказался в 3 раза больше, чем вес в жидкости. Определите плотность материала шарика.

**Ф8.5** Деревянная пластина толщиной  $h = 3$  см плавает в сосуде с водой. Сверху наливают бензин так, что уровень бензина совпадает с верхней поверхностью пластины. Бензин с водой не перемешиваются. Найти высоту налитого слоя бензина. Плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, плотность дерева  $\rho_{\text{д}} = 0,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, плотность бензина  $\rho_{\text{б}} = 0,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

**Ф8.6** В сосуд налита вода массы  $m_{\text{в}} = 5$  кг с температурой  $t_{\text{в}} = 70^\circ\text{C}$ . В воду положили лед массы  $m_{\text{л}} = 1$  кг с температурой  $t_{\text{л}} = -20^\circ\text{C}$ . Пренебрегая потерями тепла, найти установившуюся температуру воды в сосуде.

Удельная теплоёмкость воды  $c_{\text{в}} = 4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг·°C), удельная теплоёмкость льда  $c_{\text{л}} = 2,1 \cdot 10^3$  Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда  $\lambda = 3,4 \cdot 10^5$  Дж/кг.

**Ф8.7** Найти сопротивление электрической цепи между точками  $A$  и  $B$ . Сопротивление  $R = 1$  Ом.



**Ф9.1** К перекрестку по двум взаимно перпендикулярным шоссе движутся равномерно грузовая и легковая автомашины со скоростями  $V_1 = 15$  м/с и  $V_2 = 20$  м/с соответственно. В некоторый момент времени автомашины находятся от перекрестка на расстояниях  $S_1 = 300$  м и  $S_2 = 275$  м. Через какое время  $T$  расстояние между автомашинами будет наименьшим?

**Ф9.2** С высокой башни с интервалом  $\tau = 1$  с бросают с нулевой начальной скоростью два камня. На каком расстоянии  $S$  друг от друга будут находиться камни в тот момент, когда скорость второго камня станет равной  $V = 30$  м/с?

Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

**Ф9.3** Камень вылетает из метательной машины со скоростью  $V_1 = 39$  м/с и через  $T = 4,2$  с попадает в цель. В этот момент скорость камня  $V_2 = 45$  м/с. На каком расстоянии  $L$  по горизонтали от машины находится цель?

Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

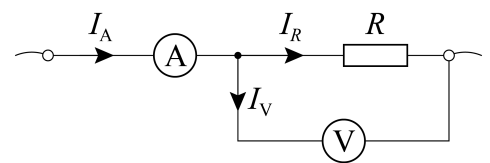
**Ф9.4** По клину массой  $M$ , находящемуся на гладкой горизонтальной плоскости, скользит шайба массой  $m$ . Гладкая наклонная плоскость клина составляет с горизонтом угол  $\alpha$ . Определите величину  $P$  силы, с которой шайба действует на клин. Ускорение свободного падения  $g$ .

**Ф9.5** Стальной кубик плавает в ртути. Поверх ртути наливают воду так, что она только покрывает кубик. Какова высота  $h$  слоя воды? Длина ребра кубика  $b = 10$  см, плотность стали  $\rho_1 = 7,8$  г/см<sup>3</sup>, плотность ртути  $\rho_2 = 13,6$  г/см<sup>3</sup>, плотность воды  $\rho_3 = 1$  г/см<sup>3</sup>.

*Примечание.* Параллельность грани куба поверхности воды при плавании обеспечивается незначительными внешними усилиями.

**Ф9.6** В калориметр, содержащий  $m_1 = 100$  г льда при  $t_1 = 0^\circ$ , наливают  $m_2 = 150$  г воды при температуре  $t_2 = 50^\circ$ . Определите установившуюся в калориметре температуру  $t$ . Удельная теплоемкость воды  $c = 4200$  Дж/(кг·К). Удельная теплота плавления льда  $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$  Дж/кг.

**Ф9.7** Для измерения сопротивления  $R$  проводника собрана электрическая цепь (см. схему на рис.). Вольтметр  $V$  показывает напряжение  $U_V = 5$  В. Показание амперметра  $A$  равно  $I_A = 25$  мА. Найдите величину  $R$  сопротивления проводника. Внутреннее сопротивление вольтметра  $R_V = 1,0$  кОм.



**Ф10.1** Винт вентилятора в момент начала торможения вращается с угловой скоростью  $\omega = 25 \text{ с}^{-1}$  и через  $\tau = 10 \text{ с}$  останавливается. Сколько оборотов совершит винт за время торможения? Считайте, что в процессе торможения угловая скорость винта уменьшается равномерно по времени.

**Ф10.2** Из одной точки одновременно бросают два камня с одинаковыми по величине начальными скоростями. Первый камень брошен под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту, второй — вертикально вверх. Через  $\tau = 2 \text{ с}$  после старта камни находятся на расстоянии  $S = 60 \text{ м}$  друг от друга. Найдите максимальное расстояние  $S_{max}$  между камнями в процессе полета камней. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

**Ф10.3** Мешок с песком падает вертикально со скоростью  $V = 5 \text{ м/с}$  на массивную тележку, движущуюся горизонтально со скоростью  $U = 1,5 \text{ м/с}$ . Мешок после удара не подскакивает. При каком наименьшем коэффициенте трения скольжения  $\mu$  мешок не будет проскальзывать по тележке после обращения в ноль его вертикальной составляющей скорости? Длительность соударения очень мала.

**Ф10.4** При какой продолжительности  $T$  суток на Земле вес тела на экваторе будет вдвое отличаться от веса этого же тела на полюсе?

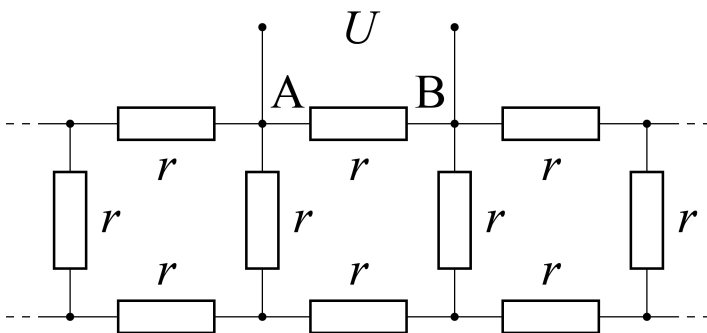
Землю считайте однородным шаром. Радиус Земли  $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$ , ускорение свободного падения у поверхности планеты  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

**Ф10.5** Найдите массу  $m$  оболочки наполненного водородом резинового шарика диаметром  $d = 25 \text{ см}$ , свободно плавающего в воздухе. Воздух и водород находятся при нормальных условиях:  $t = 0^\circ\text{C}$ ,  $P = 10^5 \text{ Па}$ . Молярная масса водорода  $\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ , молярная масса воздуха  $\mu_2 = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ . Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ . Объем шара  $V$  связан с диаметром  $d$  соотношением  $V = \frac{\pi d^3}{6}$ .

**Ф10.6** Два одинаковых металлических шара расположены на большом расстоянии. Заряд одного из шаров  $Q$ , другой не заряжен. Проводящий незаряженный шарик последовательно приводят в контакт сначала с заряженным шаром, затем с незаряженным. После двух контактов заряд шарика становится равным  $Q/9$ .

Какой заряд  $q$  перешел на шарик при первом контакте?

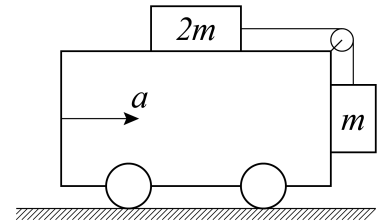
**Ф10.7** Электрическая цепь (см. схему на рисунке) состоит из очень большого («бесконечного») числа одинаковых звеньев, содержащих сопротивления  $r = 1 \text{ Ом}$ . К точкам  $A$  и  $B$  подключают источник постоянного напряжения  $U = 1,5 \text{ В}$ . Какое количество теплоты  $Q$  будет каждую секунду выделяться в цепи?



**Ф11.1** Мяч лежит на горизонтальной поверхности земли на расстоянии  $L = 4$  м от вертикального забора высотой  $H = 1,5$  м. Мальчик сообщает мячу скорость под углом к горизонту в сторону забора. В результате мяч перелетает через забор, почти касаясь его на максимальной высоте своего полета.

- 1) Найти время  $\tau$  продолжительности полета мяча от его вылета до падения на землю за забором.
- 2) Найти начальную скорость  $V$ , с которой мяч вылетел с поверхности земли. Ускорение свободного падения считать равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

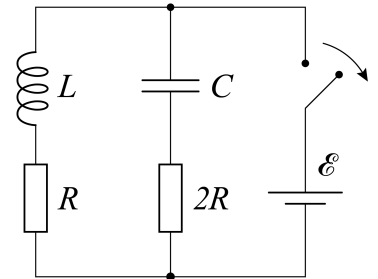
**Ф11.2** Бруски массами  $m$  и  $2m$  связаны легкой нитью, перекинутой через блок. Блок укреплен на тележке (см. рис.). Верхняя горизонтальная поверхность тележки гладкая, коэффициент трения между вертикальной поверхностью тележки и бруском массой  $m$  равен  $\mu = 0,5$ . С каким минимальным горизонтальным ускорением  $a$  надо двигать тележку, чтобы брусок массой  $m$  поднимался вверх? Массой блока и трением в его оси пренебречь.



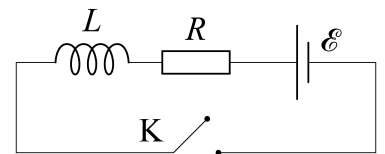
**Ф11.3** Идеальный одноатомный газ в количестве  $\nu$  (моль) расширяется от температуры  $T_1 = T$  до температуры  $T_2 = 1,2T$  в процессе с прямо пропорциональной зависимостью давления от объема. Далее газ нагревают изохорически до температуры  $T_3 = 1,6T$ . Какое количество теплоты получил газ во всем процессе?

**Ф11.4** Плоская катушка из  $n = 7$  витков находится в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,01$  Тл, направленной перпендикулярно плоскости витков катушки. Катушка замкнута на гальванометр. Катушку выносят из магнитного поля. Какой заряд пройдет через гальванометр? Площадь одного витка  $S = 2$  см<sup>2</sup>. Сопротивление витков катушки, подводящих проводов и гальванометра  $R = 4$  Ом.

**Ф11.5** Параметры идеальных элементов цепи указаны на схеме (см. рис.). Ключ замкнут, режим в цепи установился. Какое количество теплоты выделится в цепи после размыкания ключа?

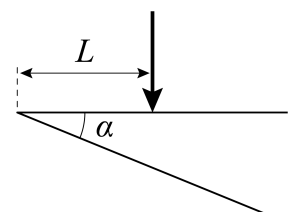


**Ф11.6** В электрической цепи, схема которой приведена на рисунке, все элементы идеальные. Параметры элементов указаны на схеме. Ключ  $K$  замыкают. В некоторый момент времени ток в цепи становится в 4 раза меньше максимального.



- 1) Найти напряжение на катушке индуктивности  $L$  в этот момент времени.
- 2) Чему равна скорость  $P$  изменения энергии в катушке в этот момент времени?

**Ф11.7** На горизонтальную поверхность клиновидной пластинки из стекла по вертикали падает луч света. Расстояние от ребра клина до места падения луча равно  $L = 10$  см. Угол при вершине клина  $\alpha = 0,2$  рад (см. рис.). На каком расстоянии от места падения луч «выйдет» из горизонтальной поверхности пластинки?



*Указание.* Угол  $\alpha$  можно считать малым, так что  $\sin \alpha \approx \alpha$ .

(из варианта исключается одна из задач 8.2, 8.4)

**М8.1** Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 разбили на две группы. Произведение чисел в первой группе равно  $A$ , а во второй группе —  $B$ . Известно, что число  $C = \frac{A}{B}$  — целое. Какое наименьшее значение может иметь число  $C$ ?

**М8.2** Известно, что 3 калача и 1 баранка стоят дороже 100 рублей, а 1 калач и 13 баранок также стоят дороже 100 рублей. Верно ли, что 1 калач и 4 баранки стоят дороже 50 рублей?

**М8.3** Пусть  $ABCD$  и  $DEFG$  — параллелограммы такие, что точка  $D$  лежит на отрезке  $AG$ , точка  $E$  — на отрезке  $DC$ , и при этом  $AB = DG = 2AD = 2DE$ . Пусть  $M$  — середина отрезка  $DG$ . Докажите, что  $CG$  — биссектриса угла  $MCF$ .

**М8.4** Можно ли расположить по кругу числа 0, 1, 2, ..., 9 так, чтобы сумма любых трех последовательных чисел была не больше 14?

**М8.5** На столе лежат 300 монет. Петя, Вася и Толя играют в следующую игру. Они ходят по очереди в следующем порядке: Петя, Вася, Толя, Петя, Вася, Толя, и т. д. За один ход Петя может взять со стола 1, 2, 3 или 4 монеты, Вася — 1 или 2 монеты, а Толя — тоже 1 или 2 монеты. Могут ли Вася и Толя договориться так, что, как бы ни играл Петя, кто-то из них двоих заберет со стола последнюю монету?

(из варианта исключается одна из задач 9.2, 9.4)

**М9.1** Найдите какое-нибудь натуральное число  $N$  такое, что если к нему прибавить его наибольший делитель, отличный от  $N$ , то получится 1212.

**М9.2** Верно ли, что при любых  $a$  и  $b$  хотя бы одно из уравнений  $x^2 - 2ax + ab = 0$  и  $x^2 - 2bx + ab = 0$  имеет решение?

**М9.3** Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 1000 по кругу так, чтобы сумма любых трех подряд идущих чисел была простым числом?

**М9.4** Действительные числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют неравенствам  $a \geq 1$ ,  $b \geq 1$ ,  $a + b \leq 2d$ . Докажите, что  $\sqrt{(a-1)(b+1)} + \sqrt{(b-1)(a+1)} < \sqrt{4d^2 - 2}$ .

**М9.5** Пусть  $AL$  — биссектриса остроугольного треугольника  $ABC$ , а  $\omega$  — описанная около него окружность. Обозначим через  $P$  точку пересечения продолжения высоты  $BH$  треугольника  $ABC$  с окружностью  $\omega$ . Докажите, что если  $\angle BLA = \angle BAC$ , то  $BP = CP$ .

(из варианта исключается одна из задач 10.2, 10.3)

**М10.1** Второй, первый и третий члены арифметической прогрессии с ненулевой разностью образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель.

**М10.2** Пусть сумма чисел  $a, b, c$  положительна. Докажите, что уравнение  $a(x-b)(x-c) + b(x-a)(x-c) + c(x-a)(x-b) = 0$  имеет хотя бы один действительный корень.

**М10.3** Натуральное число  $n$  таково, что  $(n+1)! + (n+1)$  делится на  $n! + n$ . Какие значения может принимать  $n$ ?

**М10.4** Пусть  $A = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots}}} + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots}}}$  (в каждом слагаемом 2019 корней). Что больше:  $A$  или 9?

**М10.5** Внутри окружности расположен пятиугольник  $ABCDE$ , у которого все стороны одинаковы. Каждая сторона пятиугольника продолжена до пересечения с окружностью. Продолжения лучей  $AB, BC, CD, DE, EA$  окрашены в синий цвет, остальных лучей — в красный цвет. Докажите, что сумма длин всех красных отрезков равна сумме длин всех синих отрезков.



(из варианта исключается одна из задач 11.2, 11.4)

**М11.1** Ненулевые числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что числа  $a(b - c)$ ,  $b(c - a)$  и  $c(a - b)$ , записанные в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что тогда и числа  $a(b^{2109} - c^{2109})$ ,  $b(c^{2109} - a^{2109})$  и  $c(a^{2109} - b^{2109})$  также образуют арифметическую прогрессию.

**М11.2** Известно, что трехчлен  $x^2 + ax + b$  с положительными коэффициентами имеет два корня. Докажите, что для любого натурального  $n$  можно один из коэффициентов трехчлена увеличить на  $n$ , какой-то другой на  $n + 1$ , а третий оставить без изменения так, что получившийся трехчлен тоже будет иметь два корня.

**М11.3** Существуют ли различные простые числа  $m$ ,  $n$  такие, что  $m! + m$  делится на  $n! + n$ ?

**М11.4** Пусть  $A = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots}}} + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots}}} + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \dots}}}$  (в каждом слагаемом 2019 корней). Что больше:  $A$  или 18?

**М11.5** В треугольной пирамиде  $SABC$  на ребре  $SB$  выбраны точки  $M$ ,  $N$ , а на ребре  $SC$  — точки  $K$ ,  $L$ . Оказалось, что точки  $A$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $K$ ,  $L$  лежат на одной сфере, а объемы пирамид  $ASKN$  и  $ASML$  равны. Докажите, что  $KL = MN$ .

**Межвузовский центр воспитания и развития талантливой молодежи в области  
естественно-математических наук «Физтех-Центр»**

Сборник подготовили:

Солоднев С. А., Останин П. А., Гаврилов Ю. А., Диких, Д. А., Зарубин И. Е., Поминов С. С., Щербина Е. Н, Мукин Т. В., Шомполов И. Г., Трушин В. Б., Черкасова Е. К., Сидорова И. Е., Подлипский О. К., Агаханов Н. Х., Усков В. В., Плис В. И., Чивилёв В. И., Шеронов А. А., Юрьев Ю. В.

Под общей редакцией Шомполова И. Г.

Компьютерный набор Останин П. А.

Материалы данного конкурса доступны для свободного некоммерческого использования (при использовании ссылка на источник обязательна).

© Московский физико-технический институт (государственный университет), 2018-2019.