

«Физтех. Бизнес»

Конкурс	11 класс, вариант 1
Количество заданий	5
Сумма баллов	80
Время написания	240 минут

Если не сказано иного, считайте все единицы товаров, ресурсов и активов во всех задачах бесконечно делимыми. Количества фирм и людей могут быть только целыми.

Старайтесь излагать свои мысли четко, писать разборчиво. Зачеркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачеркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе.

Всякий раз четко обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. Перед началом решения пункта а) можно выписать общую часть, подходящую для всех пунктов, и дальше ссылаться на нее. Не пропускайте ходы в решении: жюри может ставить баллы за любые корректно выполненные действия, даже если вам они кажутся малозначительными.

Все утверждения, содержащиеся в вашем решении, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений. Все не общеизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное.

Удачи!

Заключительный этап олимпиада «Физтех. Бизнес». Задачи.

1. Коронавирус и внешний эффект

После разразившейся коронавирусной инфекции в городе Энске правительство все-речь решило заняться проблемой вакцинирования населения. Известно, что вакцинирование является добровольным. Единственная компания, производящая и реализующая вакцину в городе, здесь и далее продает ее по цене 16 рублей за штуку, а ее издержки имеют вид $ТС_V = V^2$, где V – количество проданных вакцин. Также, в городе есть частная больница, занимающаяся лечением пневмонии. Услуги лечения в больнице стоят фиксированные 2 рубля, а издержки больницы зависят от коллективного иммунитета населения, то есть от количества реализованных вакцин. Так, издержки больницы имеют вид $ТС_B = \frac{B^2}{V}$, где B – количество курсов лечения пневмонии. Считайте, что больница и фирма-производитель всегда максимизируют свою прибыль.

(а) (3 балла) Рассчитайте, сколько вакцин и курсов лечения от пневмонии будет реализовано изначально.

(б) (5 баллов) Правительство Энска решает вмешаться в рынок, который не учитывает положительный эффект от реализации вакцин. Чтобы эффект полностью учитывался, правительство решило принудительно объединить обе фирмы в одну, которая будет максимизировать суммарную прибыль. Найдите, сколько вакцин и курсов лечения будет реализовано в таком случае.

(с) (8 баллов) Создание единой компании не понравилось Федеральной Антимонопольной Службе, и она запретила объединение фирм. Мэрии Энска пришлось думать, как заставить фирмы учитывать положительный внешний эффект от вакцин по-другому. Впоследствии было принято следующее решение: мэрия создала рынок доплаты за вакцины, обязав больницу выплачивать фиксированную сумму P за каждую реализованную вакцину фирме-производителю. Цену на получившемся «рынке положительного эффекта» обе фирмы, пока еще не осознавшие свою рыночную власть, воспринимают как заданную, формируя на данном рынке спрос и предложение. Определите равновесную цену P , а также количество реализованных вакцин и курсов лечения от пневмонии в данном случае.

Решение

а) Запишем и промаксимизируем прибыль сначала производителя вакцины, так как его оптимум не зависит от больницы:

$$\begin{aligned}\Pi_V &= 16V - V^2 \xrightarrow{V} \max \\ V^* &= 8\end{aligned}$$

То же самое, зная V , сделаем для больницы:

$$\begin{aligned}\Pi_B &= 2B - \frac{B^2}{V} = 2B - \frac{B^2}{8} \xrightarrow{B} \max \\ B^* &= 8\end{aligned}$$

Ответ: $B = 8, V = 8$.

б) Запишем суммарную прибыль двух фирм:

$$\Pi = 16V - V^2 + 2B - \frac{B^2}{V}$$

Нам необходимо промаксимизировать ее по двум переменным. Сначала промаксимизируем по B , подставим оптимум обратно и затем промаксимизируем по V :

$$\Pi = 16V - V^2 + 2B - \frac{B^2}{V} \xrightarrow{B} \max$$

$$B^* = V$$

$$\Pi = 16V - V^2 + 2B - \frac{B^2}{V} = 16V - V^2 + 2V - V = 17V - V^2 \xrightarrow{V} \max$$

$$V^* = 8,5$$

$$B^* = V^* = 8,5$$

Ответ: $B = V = 8,5$

с)

Теперь необходимо прооптимизировать прибыли фирм, учитывая, что производитель вакцин получает доплату, равную $P \cdot V$, а больница ее ему выплачивает. Начнем с прибыли производителя вакцин:

$$\Pi_V = 16V - V^2 + PV \xrightarrow{V} \max$$

$$V^* = \frac{16 + P}{2}$$

Мы получили функцию предложения внешнего эффекта.

Больница же теперь должна выбрать как объем курсов лечения, так и количество вакцин, за которые она заплатит производителю. Таким образом, необходимо промаксимизировать ее прибыль по двум переменным.

$$\Pi_B = 2B - \frac{B^2}{V} - PV \xrightarrow{B} \max$$

$$B^* = V$$

$$\Pi_B = 2B - \frac{B^2}{V} - PV = 2V - V - PV = V - PV = (1 - P)V \xrightarrow{V} \max$$

Заметим, что последняя функция является линейной и ее оптимум зависит от коэффициента наклона. Если он положительный, берем максимальный $V = \infty$, если отрицательный, $V = 0$, а если нулевой, то любое значение V является оптимальным, так как дает одно и то же значение функции. Таким образом, спрос на внешний эффект выглядит следующим образом:

$$V^* = \begin{cases} \infty & P < 1 \\ [0; \infty] & P = 1 \\ 0 & P > 1 \end{cases}$$

Осталось пересечь найденные спрос и предложение. Заметим, что положительный объем находится только на горизонтальном участке спроса ($P = 1$). Следовательно,

пересечение может быть только на этом участке. Подставим $P = 1$ в функцию предложения, и получим:

$$V^* = \frac{16 + P}{2} = \frac{17}{2} = 8,5$$
$$B = V = 8,5$$

Ответ: $B = V = 8,5$, $P = 1$

2. Банковский кризис

В банковском секторе США сейчас продолжают проблемы: после банкротства крупных банков люди бросились снимать деньги со счетов. ФРС США (Федеральная Резервная Система, аналог российского Центрального Банка) объявила о выдаче большого количества займов коммерческим банкам, чтобы справиться с паникой (так, за первые 2 недели кризиса было выдано \$390 млрд, по сравнению с \$4 млрд неделей ранее). Также, совсем недавно ФРС повысила ключевую ставку (ставку, под которую коммерческие банки могут брать кредиты у ЦБ) в экономике до уровня 5% годовых. Однако, именно с резким повышением ставки в прошлом связывают проблемы обанкротившихся банков в США.

=3+5+3

(a) (3 балла) Объясните, почему чрезмерное изъятие денег с банковских счетов может создать проблемы для экономики страны.

(b) (5 баллов) Объясните, почему резкое повышение ключевой ставки может привести к проблемам у банков.

(c) (8 баллов) Объясните, почему увеличение количества займов банкам со стороны ФРС и одновременное повышение ключевой ставки в экономике являлись бы противоречивыми действиями в безкризисной ситуации.

Решение

a) Банковские вклады не полностью обеспечиваются банковскими резервами. Чрезмерное снятие средств приведет к тому, что банк не сможет расплатиться по депозитам и обанкротиться. При банкротстве большого количества банков страдает вся финансовая система страны, отвечающая за эффективное распределение средств в экономике, что значительно снижает экономический потенциал страны и приводит к кризису.

b) Резкое повышение ключевой ставки приводит к тому, что текущие активы банков (например, кредиты, которые они выдали под меньшую ставку, или же облигации, в который они вложились тоже под меньшую ставку) обесцениваются. Это приводит к снижению их прибыли и падению стоимости, что и, по факту, и подразумевается под словом «проблемы».

Также, можно объяснить проблемы присутствием некоего «арбитража», когда вкладчики могут переложить свои депозиты под более высокий процент, а кредиты оставить под низкий процент.

c) Увеличение количества займов банкам является элементом стимулирующей монетарной политики (политики насыщения экономики деньгами), тогда как повышение ставки является элементом сдерживающей монетарной политики (при более высокой ставке брать кредиты не так выгодно, следовательно, в экономике становится меньше активных денег). Получается, что одновременное применение и стимулирующей, и сдерживающей политики являлось бы противоречивым в безкризисной ситуации.

3. Покупка конкурента

На рынке авиаперевозок со спросом $P_d = 36 - Q$ конкурируют фирмы Флот и Беда. Перевозки, осуществляемые фирмами однородны, потребителям безразлично у какой фирмы покупать перевозки. Фирмы конкурируют, выбирая объем перевозок, одновременно выпуская Q_f и Q_b соответственно. После этого цена формируется из уравнения спроса: $P_d = 36 - Q_f - Q_b$. Вот только фирма Флот гораздо более технологична и имеет издержки на перевозки, равные $TC = 4Q_f$, в то время как издержки Беды – $TC = 8Q_b$.

(а) (3 балла) Найдите выпуски, которые выберут фирмы в равновесии.

(б) (5 баллов) Флот решает воспользоваться наилучшим положением Беды и решает купить часть фирмы. Если Флот купит меньше 50% Беды, то он просто получит долю ее прибыли, равную доле фирмы, которую он купил. Если флот купит 50% или более Беды, то он получит право назначить выпуск Беды и также получит долю прибыли, получаемую ей. Собственник Беды согласится продать Беду, только если сумма выручки от продажи части компании и прибыли от оставшейся части будет больше или равна, чем прибыль, которую может получить собственник, не продавая Беду. Если собственнику безразлично продавать или не продавать, то он продает часть фирмы. Найдите стратегию действий Флота (долю выкупаемой компании, выплачиваемую сумму, назначенный выпуск/выпуски), при которой он сможет получить наибольшую прибыль.

(с) (8 баллов) Контроль над сделкой поглощения решил провести ФАС. Он одобрит сделку, только если общественное благосостояние после слияние фирм увеличится хотя бы на 8. Общественное благосостояние является суммой излишка потребителя (здесь он будет равен $\frac{Q^2}{2}$) и прибылей фирм. На каких условиях состоится сделка, если Флот будет придерживаться стратегии из предыдущего пункта?

Решение

а)

Решим олигополию с одновременным взаимодействием:

$$\Pi_f = (36 - Q_f - Q_b)Q_f - 4Q_f \rightarrow \max(Q_f)$$

$$\Pi_b = (36 - Q_f - Q_b)Q_b - 8Q_b \rightarrow \max(Q_b)$$

Прибыли - параболы ветвями вниз, найдем их максимум, используя производную:

$$\Pi'_f = 32 - 2Q_f - Q_b = 0$$

$$\Pi'_b = 28 - Q_f - 2Q_b = 0$$

Решив систему, получим $Q_f = 12$, $Q_b = 8$

Также посчитаем прибыли, они нам понадобятся в следующем пункте:

$$\Pi_f = 16 * 12 - 4 * 12 = 144, \Pi_b = 16 * 8 - 8 * 8 = 64$$

б)

Заметим, что покупка меньше половины конкурента - бесполезна - она ни к чему не приводит (т.к. Флот заплатит ровно столько же, сколько получит прибыли от выпуска Беды). Поэтому надо анализировать случай, когда Флот покупает больше половины Беды.

Далее заметим, что установка ненулевого выпуска для Беды - тоже не оптимально, т.к. Флот имеет меньшие издержки, поэтому может эффективнее создавать продукцию.

Следовательно кандидат на оптимальную стратегию:

- Флот покупает 50% или более Беды, платит за это 64(прибыль, которую Беда получала в прошлом пункте)
- Флот назначает монопольный для себя выпуск, а выпуск Беды зануляет

Проверим оптимальность этой стратегии, посчитав прибыль Флота:

$$\Pi_f = (36 - Q_f) * Q_f - 4Q_f - 64 \rightarrow \max(Q_f)$$

$$Q_f = 16, \Pi_f = 256 - 64 = 192 > 144 (\text{значение прибыли из прошлого пункта})$$

Следовательно данная стратегия действительно является оптимальной.

в)

Для решения этого пункта посчитаем благосостояние в пунктах а) и б).

$$\text{В пункте а) } SW = \Pi_f + \Pi_b + CS = 144 + 64 + 20 * 20/2 = 408$$

$$\text{В пункте б) } SW = \Pi_f + \Pi_b + CS = 256 - 64 + 64 + 16 * 16/2 = 384$$

Пока что общественное благосостояние падает, а надо, чтобы оно повысилось. Для повышения общественног о благосостояния, монополист с постоянными предельными издержками должен увеличивать свой выпуск.

$$SW = \frac{Q^2}{2} + Q(32 - Q) \geq 408 + 8 = 416$$

Решим уравнение и получим $Q = 32 - 8\sqrt{3}$, тогда цена, которую надо установить $P = 4 + 8\sqrt{3}$, $\Pi_f = (32 - 8\sqrt{3})(4 + 8\sqrt{3} - 4) = 64(4 - \sqrt{3})$

Сравим прибыли и получим:

$$64(4 - 4\sqrt{3}) > 144$$

$$16\sqrt{3} > 25$$

$$768 > 625$$

Следовательно в данном случае оптимальная стратегия фирмы изменится:

- Флот покупает 50% или более Беды, платит за это 64(прибыль, которую Беда получала в прошлом пункте)
- Флот назначает выпуск $Q_f = 32 - 8\sqrt{3}$, чтобы удовлетворить требованиям ФАС.

4. Любители мороженого

В некотором очень небольшом городе, в котором живет 24 человека, $a > 0$ человек любят есть мороженое с клубникой, а $b > 0$ любят есть мороженое с шоколадом. При этом известно, что $a + b < 24$. Назовём любителей шоколадного и клубничного мороженого активными потребителями, а оставшихся жителей - нейтральными. Бизнесмен Александр хочет начать продавать жителям города мороженое, при этом он не может в силу производственных ограничений производить оба вида мороженого, и сейчас выбирает, какой из вкусов производить.

Но всё не так просто, ведь любители клубничного и шоколадного мороженого ведут свою игру и убеждают нейтральных жителей становиться любителями того же типа мороженого, что и они. Так как общество в целом любит клубничное мороженое, то один любитель клубничного может убедить одного нейтрального в своих вкусах, а каждые два любителя шоколадного могут убедить лишь одного нейтрального. При этом если человека убеждают и те, и те, то он путается и не будет покупать мороженое вообще. Бизнесмен Александр будет производить то мороженое, которое нравится большинству жителей города.

Каждый активный потребитель хочет убеждать нейтральных таким образом, чтобы бизнесмен Александр в итоге решил производить именно его тип мороженого. Любители шоколадного мороженого не покупают клубничное и наоборот. При этом нейтральные покупают любой тип мороженого, какого бы вкуса оно не было, а жители в этом городе бесконечно делимы.

(а) (3 балла) Найдите, мороженое какого вкуса выберет производить Александр если $a = 3$, а $b = 4$.

(б) (5 баллов) Предположим, что $a + b \leq 12$, мороженое какого вкуса выберет производить Александр в зависимости от значений a и b ?

(с) (8 баллов) Для всех возможных изначальных значений a и b ($a + b < 24$ и $a, b > 0$) определите, мороженое какого вкуса выберет производить Александр.

Решение

Для начала заметим, что каждому жителю безразлично убеждать ли нового человека или убеждать уже убежденного, чтобы сделать его нейтральным, так как оба действия приносят жителям один относительный голос (либо уменьшает количество голосов за противоположный вид мороженого, либо увеличивает за его вид мороженого).

(а) Поскольку изначально $a = 3$, то в итоге за мороженое с клубникой проголосуют $2a = 6$ человек. Аналогично при $b = 4$ всего за мороженое с шоколадом проголосуют $1.5b = 6$ человек. Получаем, что производителю безразлично, какое мороженое производить – и так, и так купят 6 человек. (Учитывая замечание выше)

Важно проверить самое строгое ограничение, что всего после «убеждения» будет $12 < 24$ человек \rightarrow подходит.

(б) Известно, что $a + b \leq 12$. Тогда после процедуры «убеждения» всего голосов будет $2a + 1,5b \leq 2(a + b) \leq 2 \cdot 12 = 24$, то есть ограничение из предыдущего пункта не выбивается. В таком случае производителю будет выгодно выбрать клубничное мороженое при $2a > 1,5b$, или $a > 0,75b$, и наоборот, шоколадное при $a < 0,75b$. При $a = 0,75b$ ему будет безразлично.

(с) Рассмотрим следующие возможные случаи

Случай I. После «убеждения» голосов будет меньше или равно 24, то есть любители разных видов мороженого не пересекутся.

Ограничение: $2a + 1,5b \leq 24$ и

Оптимальный выбор: описан в первом пункте (выбираем клубнику при $a > 0,75b$).

Случай II. После «убеждения» будут люди, которых убеждали в обе стороны – их нужно вычесть из голосующих. При этом в данном случае считаем, что «агитаторы» не придут к противоположной стороне, а будут убеждать только нейтральных.

Ограничения:

$$\begin{cases} 2a + 1,5b > 24 \\ 2a + b < 24 \\ a + 1,5b < 24 \end{cases}$$

При таком ограничении получим, что НЕ голосующими будут $(2a + 1,5b - 24)$ человек (превышение над количеством населения). Значит голосовать за клубнику будут $(2a - (2a + 1,5b - 24)) = 24 - 1,5b$, а за шоколад $- 1,5b - (2a + 1,5b - 24) = 24 - 2a$. Заметим, что оптимальный выбор будет таким же, как и в предыдущем пункте.

Случай III. При убеждении клубничники залезут на шоколадников, а шоколадники на них – нет. Тогда из числа голосующих за клубнику надо их вычесть, а за шоколад будут голосовать только b .

Ограничения:

$$\begin{cases} 2a + b > 24 \\ a + 1,5b < 24 \end{cases}$$

НЕ голосующими становятся $0,5b$ человек, тогда за клубнику будут голосовать все кроме тех, кто не голосует и тех, кто голосует за шоколад, итог: $(24 - b - 0,5b) = 24 - 1,5b$, а за шоколад – b . Тогда будем выбирать клубнику при $b < 9,6$ и, наоборот, шоколад при $b > 9,6$ и при $b = 9,6$ будет безразлично.

Случай IV. Аналогичная ситуация, только наоборот.

Ограничения:

$$\begin{cases} 2a + b < 24 \\ a + 1,5b > 24 \end{cases}$$

За шоколад будут голосовать $24 - a - a = 24 - 2a$, а за клубнику – a . Тогда будем выбирать клубнику при $a > 8$ и, наоборот, шоколад при $a < 8$. При $a = 8$ будет безразлично.

Случай V. Теперь пересекаются оба множества. Ограничения:

$$\begin{cases} 2a + b > 24 \\ a + 1,5b > 24 \end{cases}$$

В таком случае ни одна позиция не сможет никого убедить – все нейтральные останутся нейтральными. Тогда за клубнику будут голосовать a , а за шоколад – b человек.

Выберем клубнику при $a > b$ и наоборот.

5. Убеждение фирм

Наивная страна – закрытая трехсекторная экономика. Потребление в стране не зависит от дохода и является автономным: $C_a = 100$, а фирмы инвестируют по следующему правилу: если выпуск в предыдущем периоде меньше чем выпуск, который ожидают фирмы в этом периоде, то инвестиции положительны и равны $0.5Y$, где Y – ожидаемый выпуск в текущем периоде. Если выпуск в текущем периоде меньше или равен выпуску в предыдущем, то фирмы не инвестируют ничего. Государственные закупки автономны и равны 50, а налоги в стране отсутствуют.

(а) (4 балла) Предположим, что фирмы действуют наивно: в каждом периоде они ожидают такой же выпуск, который был в предыдущем периоде. На сколько нужно увеличить государственные закупки, чтобы добиться увеличения выпуска на 100?

(б) (6 баллов) Предположим, что государство может убедить фирмы, что оно увеличит государственные закупки, и поэтому выпуск в текущем периоде окажется больше, чем в предыдущем. Найдите, на сколько государству нужно будет увеличить государственные закупки, чтобы добиться увеличения выпуска на 100, если фирмы будут убеждены в том, что выпуск будет увеличен.

(с) (5 баллов) В реалиях предыдущего пункта оказывается, что убеждение фирм оказывается затратным, и для того, чтобы фирмы действительно поверили государству, надо потратить $\Delta G = G_t - G_{t-1}$ усилий (чем выше изменение государственных закупок, тем сложнее убеждать фирмы в том, что это изменение произойдет). Государство, любящее стабильность, минимизирует следующую функцию потерь:

$$L = (Y_t - Y_{t-1})^2 + (G_t - G_{t-1})^2$$

Найдите оптимальное изменение государственных закупок в каждом периоде.

Решение

а) Запишем тождество равенства доходов расходам:

$$Y = C + I + G$$

$Y = 100 + 50$, если фирмы не верят, что выпуск будет выше.

$Y = 100 + 0.5Y + 50$, если фирмы верят, что выпуск будет выше.

В данном случае фирмы не верят, что выпуск будет выше, тогда задача правительства повысить выпуск на 100, при условии, что $Y = 100 + 50 + \Delta G$

Отсюда понимаем, что изменение выпуска равно изменению государственных закупок, следовательно для увеличения выпуска на 100 необходимо увеличить гос.закупки на 100.

б)

В данном случае фирмы верят, что выпуск будет выше, тогда задача правительства повысить выпуск на 100, при условии, что $Y = 100 + 50 + 0.5Y + \Delta G$

$$0.5Y = 100 + 50 + \Delta G.$$

Отсюда понимаем, что выпуск изменяется в 2 раза быстрее государственных закупок, следовательно для увеличения выпуска на 100 необходимо увеличить гос.закупки на 50.

в)

Заметим, что наилучшее состояние для государства - стабильность, когда выпуск в текущем периоде равен выпуску в предыдущем, ровно как и государственные закупки (потому что функция потерь - сумма двух квадратов отклонений, которая больше или равна нулю, а равняется нулю, лишь когда оба квадрата равны нулю). Следовательно идеальное изменение государственных закупок нулевое, тогда не изменится и выпуск и значение функции потерь будет минимальное, т.е. нулевое.

«Физтех. Бизнес»

Конкурс	11 класс, вариант 2
Количество заданий	5
Сумма баллов	80
Время написания	240 минут

Если не сказано иного, считайте все единицы товаров, ресурсов и активов во всех задачах бесконечно делимыми. Количества фирм и людей могут быть только целыми.

Старайтесь излагать свои мысли четко, писать разборчиво. Зачеркнутые фрагменты не будут проверены. Если вы хотите, чтобы зачеркнутая часть была проверена, явно напишите об этом в работе.

Всякий раз четко обозначайте, где начинается решение каждого пункта задачи. Перед началом решения пункта а) можно выписать общую часть, подходящую для всех пунктов, и дальше ссылаться на нее. Не пропускайте ходы в решении: жюри может ставить баллы за любые корректно выполненные действия, даже если вам они кажутся малозначительными.

Все утверждения, содержащиеся в вашем решении, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений. Все необщеизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Если в решении есть противоречащие друг другу суждения, то они не будут оценены, даже если одно из них верное.

Удачи!

Заключительный этап олимпиада «Физтех. Бизнес». Задачи.

1. Коронавирус и внешний эффект

После разразившейся коронавирусной инфекции в городе Энске правительство все-речь решило заняться проблемой вакцинирования населения. Известно, что вакцинирование является добровольным. Единственная компания, производящая и реализующая вакцину в городе, здесь и далее продает ее по цене 12 рублей за штуку, а ее издержки имеют вид $ТС_V = V^2$, где V – количество проданных вакцин. Также, в городе есть частная больница, занимающаяся лечением пневмонии. Услуги лечения в больнице стоят фиксированный 1 рубль, а издержки больницы зависят от коллективного иммунитета населения, то есть от количества реализованных вакцин. Так, издержки больницы имеют вид $ТС_B = \frac{B^2}{V}$, где B – количество курсов лечения пневмонии. Считайте, что больница и фирма-производитель всегда максимизируют свою прибыль.

(а) (3 балла) Рассчитайте, сколько вакцин и курсов лечения от пневмонии будет реализовано изначально.

(б) (5 баллов) Правительство Энска решает вмешаться в рынок, который не учитывает положительный эффект от реализации вакцин. Чтобы эффект полностью учитывался, правительство решило принудительно объединить обе фирмы в одну, которая будет максимизировать суммарную прибыль. Найдите, сколько вакцин и курсов лечения будет реализовано в таком случае.

(в) (8 баллов) Создание единой компании не понравилось Федеральной Антимонопольной Службе, и она запретила объединение фирм. Мэрии Энска пришлось думать, как заставить фирмы учитывать положительный внешний эффект от вакцин по-другому. Впоследствии было принято следующее решение: мэрия создала рынок доплаты за вакцины, обязав больницу выплачивать фиксированную сумму P за каждую реализованную вакцину фирме-производителю. Цену на получившемся «рынке положительного эффекта» обе фирмы, пока еще не осознавшие свою рыночную власть, воспринимают как заданную, формируя на данном рынке спрос и предложение. Определите равновесную цену P , а также количество реализованных вакцин и курсов лечения от пневмонии в данном случае.

Решение

а) Запишем и промаксимизируем прибыль сначала производителя вакцины, так как его оптимум не зависит от больницы:

$$\begin{aligned}\Pi_V &= 12V - V^2 \xrightarrow{V} \max \\ V^* &= 6\end{aligned}$$

То же самое, зная V , сделаем для больницы:

$$\begin{aligned}\Pi_B &= B - \frac{B^2}{V} = B - \frac{B^2}{6} \xrightarrow{B} \max \\ B^* &= 3\end{aligned}$$

Ответ: $B = 3$, $V = 6$.

б) Запишем суммарную прибыль двух фирм:

$$\Pi = 12V - V^2 + B - \frac{B^2}{V}$$

Нам необходимо промаксимизировать ее по двум переменным. Сначала промаксимизируем по B , подставим оптимум обратно и затем промаксимизируем по V :

$$\Pi = 12V - V^2 + B - \frac{B^2}{V} \xrightarrow{B} \max$$

$$B^* = \frac{V}{2}$$

$$\Pi = 12V - V^2 + B - \frac{B^2}{V} = 12V - V^2 + \frac{V}{2} - \frac{V}{4} = 12\frac{1}{4}V - V^2 \xrightarrow{V} \max$$

$$V^* = 6,125$$

$$B^* = \frac{V^*}{2} = 3,0625$$

Ответ: $B = 3,0625$, $V = 6,125$

с)

Теперь необходимо прооптимизировать прибыли фирм, учитывая, что производитель вакцин получает доплату, равную $P \cdot V$, а больница ее ему выплачивает. Начнем с прибыли производителя вакцин:

$$\Pi_V = 12V - V^2 + PV \xrightarrow{V} \max$$

$$V^* = \frac{12 + P}{2}$$

Мы получили функцию предложения внешнего эффекта.

Больница же теперь должна выбрать как объем курсов лечения, так и количество вакцин, за которые она заплатит производителю. Таким образом, необходимо промаксимизировать ее прибыль по двум переменным.

$$\Pi_B = B - \frac{B^2}{V} - PV \xrightarrow{B} \max$$

$$B^* = \frac{V}{2}$$

$$\Pi_B = B - \frac{B^2}{V} - PV = \frac{V}{2} - \frac{V}{4} - PV = \frac{V}{4} - PV = \left(\frac{1}{4} - P\right)V \xrightarrow{V} \max$$

Заметим, что последняя функция является линейной и ее оптимум зависит от коэффициента наклона. Если он положительный, берем максимальный $V = \infty$, если отрицательный, $V = 0$, а если нулевой, то любое значение V является оптимальным, так как дает одно и то же значение функции. Таким образом, спрос на внешний эффект выглядит следующим образом:

$$V^* = \begin{cases} \infty & P < \frac{1}{4} \\ [0; \infty] & P = \frac{1}{4} \\ 0 & P > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Осталось пересечь найденные спрос и предложение. Заметим, что положительный объем находится только на горизонтальном участке спроса ($P = \frac{1}{4}$). Следовательно, пересечение может быть только на этом участке. Подставим $P = \frac{1}{4}$ в функцию предложения, и получим:

$$V^* = \frac{12 + P}{2} = \frac{12\frac{1}{4}}{2} = 6,125$$

$$B = \frac{V}{2} = 3,0625$$

Ответ: $B = 3,0625$, $V = 6,125$, $P = \frac{1}{4}$

2. Банковский кризис

В банковском секторе США сейчас продолжают проблемы: после банкротства крупных банков люди бросились снимать деньги со счетов. ФРС США (Федеральная Резервная Система, аналог российского Центрального Банка) объявила о выдаче большого количества займов коммерческим банкам, чтобы справиться с паникой (так, за первые 2 недели кризиса было выдано \$390 млрд, по сравнению с \$4 млрд неделей ранее). Также, совсем недавно ФРС повысила ключевую ставку (ставку, под которую коммерческие банки могут брать кредиты у ЦБ) в экономике до уровня 5% годовых. Однако, именно с резким повышением ставки в прошлом связывают проблемы обанкротившихся банков в США.

(а) (3 балла) Объясните, почему люди бросились снимать деньги со счетов, когда узнали о банкротстве нескольких банков.

(б) (5 баллов) Объясните, почему резкое повышение ключевой ставки может привести к проблемам у банков.

(с) (8 баллов) Объясните, почему увеличение количества займов банкам со стороны ФРС с точки зрения экономической теории является нелогичным в случае увеличения ставки процента.

Решение

а) Банкротства банков означает, что они не смогут выдать депозиты, которые люди в них имели. Боясь продолжения банкротств, люди бросились снимать деньги, чтобы успеть их забрать до того момента, как банк обанкротится. Несмотря на то, что часть вкладов застрахованы, их получение после банкротства может быть связано с большими затратами времени, поэтому лучше снять деньги заранее (этот факт необязателен для решения задачи)

б) Резкое повышение ключевой ставки приводит к тому, что текущие активы банков (например, кредиты, которые они выдали под меньшую ставку, или же облигации, в который они вложились тоже под меньшую ставку) обесцениваются. Это приводит к снижению их прибыли и падению стоимости, что и, по факту, и подразумевается под словом «проблемы».

Также, можно объяснить проблемы присутствием некоего «арбитража», когда вкладчики могут переложить свои депозиты под более высокий процент, а кредиты оставить под низкий процент.

с) Увеличение количества займов банкам является элементом стимулирующей монетарной политики (политики насыщения экономики деньгами), тогда как повышение ставки является элементом сдерживающей монетарной политики (при более высокой ставке брать кредиты не так выгодно, следовательно, в экономике становится меньше активных денег). Получается, что одновременное применение и стимулирующей, и сдерживающей политики являлось бы противоречивым в безкризисной ситуации.

3. Покупка конкурента

На рынке авиаперевозок со спросом $P_d = 40 - Q$ конкурируют фирмы Флот и Беда. Перевозки, осуществляемые фирмами однородны, потребителям безразлично у какой фирмы покупать перевозки. Фирмы конкурируют, выбирая объем перевозок, одновременно выпуская Q_f и Q_b соответственно. После этого цена формируется из уравнения спроса: $P_d = 40 - Q_f - Q_b$. Вот только фирма Флот гораздо более технологична и имеет издержки на перевозки, равные $TC = 8Q_f$, в то время как издержки Беды – $TC = 12Q_b$.

(а) (3 балла) Найдите выпуски, которые выберут фирмы в равновесии.

(б) (5 баллов) Флот решает воспользоваться наилучшим положением Беды и решает купить часть фирмы. Если Флот купит меньше 50% Беды, то он просто получит долю ее прибыли, равную доле фирмы, которую он купил. Если флот купит 50% или более Беды, то он получит право назначить выпуск Беды и также получит долю прибыли, получаемую ей. Собственник Беды согласится продать Беду, только если сумма выручки от продажи части компании и прибыли от оставшейся части будет больше или равна, чем прибыль, которую может получить собственник, не продавая Беду. Если собственнику безразлично продавать или не продавать, то он продает часть фирмы. Найдите стратегию действий Флота (долю выкупаемой компании, выплачиваемую сумму, назначенный выпуск/выпуски), при которой он сможет получить наибольшую прибыль.

(с) (8 баллов) Контроль над сделкой поглощения решил провести ФАС. Он одобрит сделку, только если общественное благосостояние после слияние фирм увеличится хотя бы на 32. Общественное благосостояние является суммой излишка потребителя (здесь он будет равен $\frac{Q^2}{2}$) и прибылей фирм. На каких условиях состоится сделка, если Флот будет придерживаться стратегии из предыдущего пункта?

Решение

а)

Решим олигополию с одновременным взаимодействием:

$$\Pi_f = (40 - Q_f - Q_b)Q_f - 8Q_f \rightarrow \max(Q_f)$$

$$\Pi_b = (40 - Q_f - Q_b)Q_b - 12Q_b \rightarrow \max(Q_b)$$

Прибыли - параболы ветвями вниз, найдем их максимум, используя производную:

$$\Pi'_f = 32 - 2Q_f - Q_b = 0$$

$$\Pi'_b = 28 - Q_f - 2Q_b = 0$$

Решив систему, получим $Q_f = 12, Q_b = 8$

Также посчитаем прибыли, они нам понадобятся в следующем пункте:

$$\Pi_f = 16 * 12 - 4 * 12 = 144, \Pi_b = 16 * 8 - 8 * 8 = 64$$

б)

Заметим, что покупка меньше половины конкурента - бесполезна - она ни к чему не приводит (т.к. Флот заплатит ровно столько же, сколько получит прибыли от выпуска Беды). Поэтому надо анализировать случай, когда Флот покупает больше половины Беды.

Далее заметим, что установка ненулевого выпуска для Беды - тоже не оптимально,

т.к. Флот имеет меньшие издержки, поэтому может эффективнее создавать продукцию.

Следовательно кандидат на оптимальную стратегию:

- Флот покупает 50% или более Беды, платит за это 64(прибыль, которую Беда получала в прошлом пункте)
- Флот назначает монопольный для себя выпуск, а выпуск Беды зануляет

Проверим оптимальность этой стратегии, посчитав прибыль Флота:

$$\Pi_f = (40 - Q_f) * Q_f - 8Q_f - 64 \rightarrow \max(Q_f)$$

$$Q_f = 16, \Pi_f = 256 - 64 = 192 > 144(\text{значение прибыли из прошлого пункта})$$

Следовательно данная стратегия действительно является оптимальной.

в)

Для решения этого пункта посчитаем благосостояние в пунктах а) и б).

$$\text{В пункте а) } SW = \Pi_f + \Pi_b + CS = 144 + 64 + 20 * 20/2 = 408$$

$$\text{В пункте б) } SW = \Pi_f + \Pi_b + CS = 256 - 64 + 64 + 16 * 16/2 = 384$$

Пока что общественное благосостояние падает, а надо, чтобы оно повысилось. Для повышения общественного благосостояния, монополист с постоянными предельными издержками должен увеличивать свой выпуск.

$$SW = \frac{Q^2}{2} + Q(32 - Q) \geq 408 + 32 = 440$$

Решим уравнение и получим $Q = 20$, тогда цена, которую надо установить $P = 20$, $\Pi_f = 20 * (20 - 8) - 64 = 176$

Сравим прибыли и получим:

$$176 \geq 144$$

Следовательно в данном случае оптимальная стратегия фирмы изменится:

- Флот покупает 50% или более Беды, платит за это 64(прибыль, которую Беда получала в прошлом пункте)
- Флот назначает выпуск $Q_f = 20$, чтобы удовлетворить требованиям ФАС.

4. Любители мороженого

В некотором очень небольшом городе, в котором живет 36 человек, $a > 0$ человек любят есть мороженое с клубникой, а $b > 0$ любят есть мороженое с шоколадом. При этом известно, что $a + b < 36$. Назовём любителей шоколадного и клубничного мороженого активными потребителями, а оставшихся жителей - нейтральными. Бизнесмен Александр хочет начать продавать жителям города мороженое, при этом он не может в силу производственных ограничений производить оба вида мороженого, и сейчас выбирает, какой из вкусов производить.

Но всё не так просто, ведь любители клубничного и шоколадного мороженого ведут свою игру и убеждают нейтральных жителей становиться любителями того же типа мороженого, что и они. Так как общество в целом любит клубничное мороженое, то один любитель клубничного может убедить одного нейтрального в своих вкусах, а каждые два любителя шоколадного могут убедить лишь одного нейтрального. При этом если человека убеждают и те, и те, то он путается и не будет покупать мороженое вообще. Бизнесмен Александр будет производить то мороженое, которое нравится большинству жителей города.

Каждый активный потребитель хочет убеждать нейтральных таким образом, чтобы бизнесмен Александр в итоге решил производить именно его тип мороженого. Любители шоколадного мороженого не покупают клубничное и наоборот. При этом нейтральные покупают любой тип мороженого, какого бы вкуса оно не было, а жители в этом городе бесконечно делимы.

(а) (3 балла) Найдите, мороженое какого вкуса выберет производить Александр если $a = 6$, а $b = 8$.

(б) (5 баллов) Предположим, что $a + b \leq 18$, мороженое какого вкуса выберет производить Александр в зависимости от значений a и b ?

(с) (8 баллов) Для всех возможных изначальных значений a и b ($a + b < 36$ и $a, b > 0$) определите, мороженое какого вкуса выберет производить Александр.

Решение

Для начала заметим, что каждому жителю безразлично убеждать ли нового человека или убеждать уже убежденного, чтобы сделать его нейтральным, так как оба действия приносят жителям один относительный голос (либо уменьшает количество голосов за противоположный вид мороженного, либо увеличивает за его вид мороженного).

(а) Поскольку изначально $a = 6$, то в итоге за мороженое с клубникой проголосуют $2a = 12$ человек. Аналогично при $b = 8$ всего за мороженое с шоколадом проголосуют $1.5b = 12$ человек. Получаем, что производителю безразлично, какое мороженое производить – и так, и так купят 12 человек. (Учитывая замечание выше)

Важно проверить самое строгое ограничение, что всего после «убеждения» будет $24 < 36$ человек \rightarrow подходит.

(б) Известно, что $a + b \leq 18$. Тогда после процедуры «убеждения» всего голосов будет $2a + 1,5b \leq 2(a + b) \leq 2 \cdot 18 = 36$, то есть ограничение из предыдущего пункта не выбивается. В таком случае производителю будет выгодно выбрать клубничное мороженое при $2a > 1,5b$, или $a > 0,75b$, и наоборот, шоколадное при $a < 0,75b$. При $a = 0,75b$ ему будет безразлично.

(с) Рассмотрим следующие возможные случаи

Случай I. После «убеждения» голосов будет меньше или равно 36, то есть любители разных видов мороженого не пересекутся.

Ограничение: $2a + 1,5b \leq 36$ и

Оптимальный выбор: описан в первом пункте (выбираем клубнику при $a > 0,75b$).

Случай II. После «убеждения» будут люди, которых убеждали в обе стороны – их нужно вычесть из голосующих. При этом в данном случае считаем, что «агитаторы» не придут к противоположной стороне, а будут убеждать только нейтральных.

Ограничения:

$$\begin{cases} 2a + 1,5b > 36 \\ 2a + b < 36 \\ a + 1,5b < 36 \end{cases}$$

При таком ограничении получим, что НЕ голосующими будут $(2a + 1,5b - 36)$ человек (превышение над количеством населения). Значит голосовать за клубнику будут $(2a - (2a + 1,5b - 36)) = 36 - 1,5b$, а за шоколад $- 1,5b - (2a + 1,5b - 36) = 36 - 2a$. Заметим, что оптимальный выбор будет таким же, как и в предыдущем пункте.

Случай III. При убеждении клубничники залезут на шоколадников, а шоколадники на них – нет. Тогда из числа голосующих за клубнику надо их вычесть, а за шоколад будут голосовать только b .

Ограничения:

$$\begin{cases} 2a + b > 36 \\ a + 1,5b < 36 \end{cases}$$

НЕ голосующими становятся $0,5b$ человек, тогда за клубнику будут голосовать все кроме тех, кто не голосует и тех, кто голосует за шоколад, итог: $(36 - b - 0,5b) = 36 - 1,5b$, а за шоколад $- b$. Тогда будем выбирать клубнику при $b < 14,4$ и, наоборот, шоколад при $b > 14,4$ и при $b = 14,4$ будет безразлично.

Случай IV. Аналогичная ситуация, только наоборот.

Ограничения:

$$\begin{cases} 2a + b < 36 \\ a + 1,5b > 36 \end{cases}$$

За шоколад будут голосовать $36 - a - a = 36 - 2a$, а за клубнику $- a$. Тогда будем выбирать клубнику при $a > 12$ и, наоборот, шоколад при $a < 12$. При $a = 12$ будет безразлично.

Случай V. Теперь пересекаются оба множества. Ограничения:

$$\begin{cases} 2a + b > 36 \\ a + 1,5b > 36 \end{cases}$$

В таком случае ни одна позиция не сможет никого убедить – все нейтральные останутся нейтральными. Тогда за клубнику будут голосовать a , а за шоколад $- b$ человек.

Выберем клубнику при $a > b$ и наоборот.

5. Убеждение фирм

Наивная страна – закрытая трехсекторная экономика. Потребление в стране не зависит от дохода и является автономным: $C_a = 60$, а фирмы инвестируют по следующему правилу: если выпуск в предыдущем периоде меньше чем выпуск, который ожидают фирмы в этом периоде, то инвестиции положительны и равны $0.5Y$, где Y – ожидаемый выпуск в текущем периоде. Если выпуск в текущем периоде меньше или равен выпуску в предыдущем, то фирмы не инвестируют ничего. Государственные закупки автономны и равны 20, а налоги в стране отсутствуют.

(а) (4 балла) Предположим, что фирмы действуют наивно: в каждом периоде они ожидают такой же выпуск, который был в предыдущем периоде. На сколько нужно увеличить государственные закупки, чтобы добиться увеличения выпуска на 100?

(б) (6 баллов) Предположим, что государство может убедить фирмы, что оно увеличит государственные закупки, и поэтому выпуск в текущем периоде окажется больше, чем в предыдущем. Найдите, на сколько государству нужно будет увеличить государственные закупки, чтобы добиться увеличения выпуска на 100, если фирмы будут убеждены в том, что выпуск будет увеличен.

(с) (5 баллов) В реалиях предыдущего пункта оказывается, что убеждение фирм оказывается затратным, и для того, чтобы фирмы действительно поверили государству, надо потратить $\Delta G = G_t - G_{t-1}$ усилий (чем выше изменение государственных закупок, тем сложнее убеждать фирмы в том, что это изменение произойдет). Государство, любящее стабильность, минимизирует следующую функцию потерь:

$$L = (Y_t - Y_{t-1})^2 + (G_t - G_{t-1})^2$$

Найдите оптимальное изменение государственных закупок в каждом периоде.

Решение

а) Запишем тождество равенства доходов расходам:

$$Y = C + I + G$$

$Y = 60 + 20$, если фирмы не верят, что выпуск будет выше.

$Y = 60 + 0.5Y + 20$, если фирмы верят, что выпуск будет выше.

В данном случае фирмы не верят, что выпуск будет выше, тогда задача правительства повысить выпуск на 100, при условии, что $Y = 60 + 20 + \Delta G$

Отсюда понимаем, что изменение выпуска равно изменению государственных закупок, следовательно для увеличения выпуска на 100 необходимо увеличить гос.закупки на 100.

б)

В данном случае фирмы верят, что выпуск будет выше, тогда задача правительства повысить выпуск на 100, при условии, что $Y = 60 + 20 + 0.5Y + \Delta G$

$$0.5Y = 60 + 20 + \Delta G.$$

Отсюда понимаем, что выпуск изменяется в 2 раза быстрее государственных закупок, следовательно для увеличения выпуска на 100 необходимо увеличить гос.закупки на 50.

в)

Заметим, что наилучшее состояние для государства - стабильность, когда выпуск в текущем периоде равен выпуску в предыдущем, ровно как и государственные закупки (потому что функция потерь - сумма двух квадратов отклонений, которая больше или равна нулю, а равняется нулю, лишь когда оба квадрата равны нулю). Следовательно идеальное изменение государственных закупок нулевое, тогда не изменится и выпуск и значение функции потерь будет минимальное, т.е. нулевое.